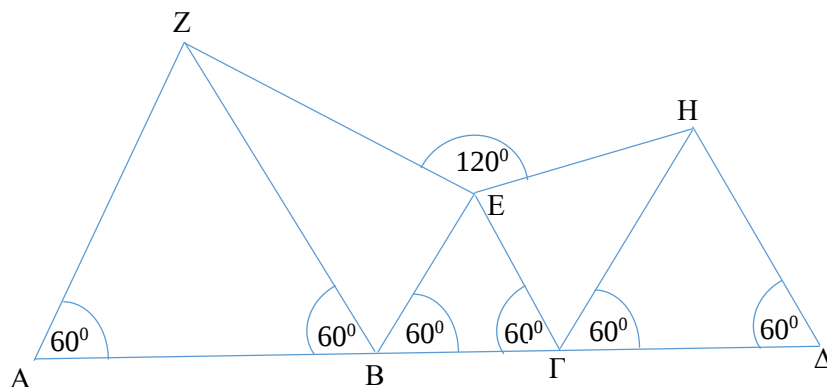


Εάν $AB=\alpha$, $B\Gamma=\beta$, $\Gamma\Delta=\gamma$, με τα δεδομένα του παρακάτω σχήματος, αποδείξτε ότι: $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$.



Λύση

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} = 1 \quad (1). \text{ Αρκεί να αποδείξουμε την (1).}$$

Από τα ισόπλευρα τρίγωνα ZAB , $EB\Gamma$ και $H\Gamma\Delta$ προκύπτουν οι σχέσεις: $ZA=ZB=AB=\alpha$, $EB=B\Gamma=E\Gamma=\beta$ και $H\Gamma=\Gamma\Delta=\Delta H=\gamma$.

Για λόγους συντομίας θέτουμε $\widehat{E\Gamma H}=\omega$. Από το σχήμα προκύπτει $\widehat{E\Gamma H}=60^\circ$ και από το τρίγωνο $E\Gamma H$ ότι $\widehat{HE\Gamma}=120^\circ-\omega$ (2). Από την (2) και τις $\widehat{B\Gamma E}=60^\circ$, $\widehat{ZE\Gamma}=120^\circ$ συμπεραίνουμε ότι $\widehat{ZEB}=60^\circ+\omega$ (3) και $\widehat{EZB}=60^\circ-\omega$ (4).

Εφαρμόζοντας τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ZBE και λαμβάνοντας υπόψη τις (3)

$$\text{και (4) παίρνουμε την σχέση: } \frac{\beta}{\eta\mu(60^\circ-\omega)} = \frac{\alpha}{\eta\mu(60^\circ+\omega)} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\eta\mu(60^\circ-\omega)}{\eta\mu(60^\circ+\omega)} \Leftrightarrow$$

$$= \frac{\eta\mu 60^\circ \sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu 60^\circ \eta\mu\omega}{\eta\mu 60^\circ \sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu 60^\circ \eta\mu\omega} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\omega - \frac{1}{2}\eta\mu\omega}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\omega + \frac{1}{2}\eta\mu\omega} = \frac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega}{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega} \quad (5).$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΓHE και λαμβάνοντας υπόψη την (2)

$$\text{παίρνουμε την σχέση: } \frac{\beta}{\eta\mu\omega} = \frac{\gamma}{\eta\mu(120^\circ-\omega)} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu(120^\circ-\omega)} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu(60^\circ+\omega)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{2\eta\mu\omega}{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega} \quad (6). \text{ Με πρόσθεση κατά μέλη των (5) και (6) παίρνουμε την } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} =$$

$$\frac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega + 2\eta\mu\omega}{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega} = \frac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega}{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega} = 1.$$